Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
1. Klausur

30. Oktober 2023

Zone A Nachmittag | **Zone B** Nachmittag | **Zone C** Nachmittag

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur dürfen Sie keinen Taschenrechner nutzen.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antwortheft ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.

8823 – 7126

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 5]

Betrachten Sie die Funktionen $f(x) = x - 3$ und $g(x) = x^2 + k^2$, mit einer reellen Konstanten k.

(a) Notieren Sie einen Ausdruck für $(g \circ f)(x)$. [2]

(b) Es sei $(g \circ f)(2) = 10$. Finden Sie die möglichen Werte von k. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. [Maximale Punktzahl: 4]

Für die Ereignisse A und B gelten $\mathrm{P}(A) = 0{,}65$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}75$ und $\mathrm{P}(A \cap B) = 0{,}6$.

(a) Finden Sie $\mathrm{P}(A \cup B)$. [2]

(b) Finden Sie damit oder auf andere Weise $\mathrm{P}(A' \cap B')$. [2]

3. [Maximale Punktzahl: 7]

Die Summe der ersten n Terme einer arithmetischen Folge ist gegeben durch $S_n = pn^2 - qn$, wobei p und q positive Konstanten sind.

Es gilt: $S_4 = 40$ und $S_5 = 65$.

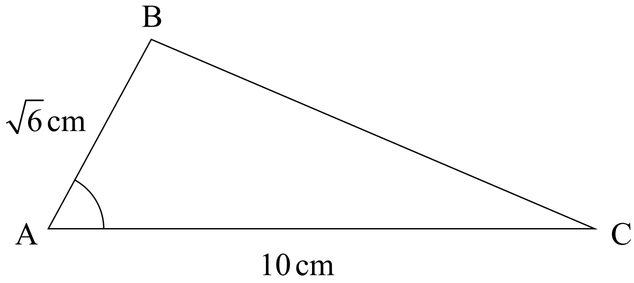
(a) Finden Sie die Werte von p und q. [5]

(b) Finden Sie den Wert von u_5. [2]

4. [Maximale Punktzahl: 6]

Im folgenden Dreieck ABC gilt: $\mathrm{AB} = \sqrt{6}\,\mathrm{cm}$, $\mathrm{AC} = 10\,\mathrm{cm}$ und $\cos \mathrm{B\hat{A}C} = \frac{1}{5}$.

Zeichnung nicht maßstabsgerecht



Finden Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

5. [Maximale Punktzahl: 6]

Die binomische Entwicklung von $(1 + kx)^n$ ist gegeben durch $1 + 12x + 28k^2x^2 + ... + k^nx^n$,
mit $n \in \mathbb{Z}^+$ und $k \in \mathbb{Q}$.

Finden Sie die Werte von n und k.

6. [Maximale Punktzahl: 7]

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $5^{2n} - 2^{3n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}^+$ durch 17 teilbar ist.

7. [Maximale Punktzahl: 5]

Es gilt: $z = 5 + q\mathrm{i}$ erfüllt die Gleichung $z^2 + \mathrm{i}z = -p + 25\mathrm{i}$, mit p, $q \in \mathbb{R}$.

Finden Sie die Werte von p und q.

8. [Maximale Punktzahl: 9]

(a) Finden Sie $\int x(\ln x)^2 \mathrm{d}x$. [6]

(b) Zeigen Sie damit, dass $\int_1^4 x(\ln x)^2 \mathrm{d}x = 32(\ln 2)^2 - 16\ln 2 + \frac{15}{4}$. [3]

9. [Maximale Punktzahl: 8]

Betrachten Sie die Funktion $f(x)=\dfrac{\sin^2(kx)}{x^2}$, mit $x \neq 0$ und $k \in \mathbb{R}^+$.

(a) Zeigen Sie, dass f eine gerade Funktion ist. [2]

(b) Es sei $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=16$. Finden Sie den Wert von k. [6]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

10. [Maximale Punktzahl: 15]

Die Funktionen f und g sind folgendermaßen definiert:

$f(x) = \ln(2x - 9)$, mit $x > \frac{9}{2}$

$g(x) = 2\ln x - \ln d$, mit $x > 0$, $d \in \mathbb{R}^+$.

(a) Geben Sie die Gleichung der vertikalen Asymptote an den Graphen von $y = g(x)$ an. [1]

Die Graphen von $y = f(x)$ und $y = g(x)$ schneiden sich in zwei verschiedenen Punkten.

(b) (i) Zeigen Sie, dass in den Schnittpunkten gilt: $x^2 - 2dx + 9d = 0$.

(ii) Zeigen Sie damit, dass $d^2 - 9d > 0$.

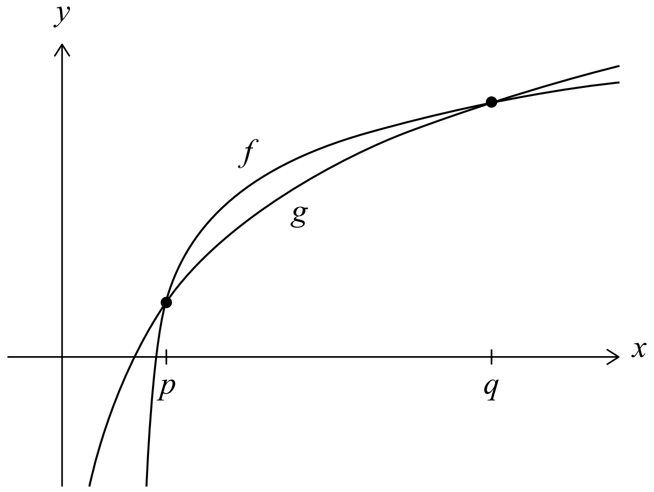
(iii) Finden Sie den Wertebereich der möglichen Werte von d. [9]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

(Fortsetzung Frage 10)

Das folgende Diagramm zeigt Teile der Graphen von $y = f(x)$ und $y = g(x)$.



Die Graphen schneiden sich an $x = p$ und $x = q$, mit $p < q$.

(c) Finden Sie für $d = 10$ den Wert von $q - p$. Geben Sie Ihre Antwort in der Form $a\sqrt{b}$, mit a, $b \in \mathbb{Z}^{+}$. [5]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

11. [Maximale Punktzahl: 21]

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{\cos 2x}$, mit $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}$.

(a) Finden Sie die Koordinaten des Punktes auf der Kurve $y = f(x)$, an dem die Steigung Null ist. [5]

(b) Zeigen Sie anhand der zweiten Ableitung an jedem in Teil (a) gefundenen Punkt, dass die Kurve $y = f(x)$ zwei lokale Hochpunkte und einen lokalen Tiefpunkt aufweist. [4]

(c) Skizzieren Sie den Teil der Funktion von $y = f(x)$ für $0 \le x \le \pi$, unter Berücksichtigung der in Teil (b) gefundenen relativen Werte der zweiten Ableitung. [3]

(d) (i) Finden Sie die Maclaurinsche Reihe für $\cos 2x$ bis einschließlich des Gliedes x^4.

(ii) Finden Sie damit die Maclaurinsche Reihe für $\mathrm{e}^{\cos 2x - 1}$ bis einschließlich des Gliedes x^4.

(iii) Notieren Sie damit die Maclaurinsche Reihe für $f(x)$ bis einschließlich des Gliedes x^4. [6]

(e) Zeigen Sie mit Hilfe der ersten beiden von Null verschiedenen Terme der Maclaurinschen Reihe für $f(x)$, dass $\int_0^{1/10} \mathrm{e}^{\cos 2x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{149\mathrm{e}}{1500}$. [3]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

12. [Maximale Punktzahl: 17]

(a) Finden Sie die binomische Entwicklung von $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^5$. Geben Sie Ihre Antwort in der Form $a + b\mathrm{i}$ an, in der a und b abhängig von $\sin\theta$ und $\cos\theta$ ausgedrückt werden. [4]

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von de Moivre und Ihrer Antwort aus Teil (a), dass $\sin 5\theta \equiv 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$ gilt. [6]

(c) (i) Zeigen Sie damit, dass $\theta = \frac{\pi}{5}$ und $\theta = \frac{3\pi}{5}$ Lösungen der Gleichung $16\sin^4\theta - 20\sin^2\theta + 5 = 0$ sind.

(ii) Zeigen Sie damit, dass $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{3\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. [7]

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.